Corps algébriquement clos - TD 5

1. Montrer que les corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas algébriquement clos de deux façons différentes.

2. Si F est un corps fini, alors F n'est pas algébriquement clos.

3. Si F est un corps, t est un élément transcendant sur F et $f_1(t) = f_2(t)$ pour certains $f_1(x), f_2(x) \in F[x]$, alors $f_1(x) = f_2(x)$. Montrer que cela n'est pas vrai pour des éléments algébriques.

4. Si F est un corps et t est un élément transcendant sur F, alors $F(t)$ n'est pas algébriquement clos.

5. Soit $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in F[x]$. On pose $f'(x) := \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} \in F[x]$ et on appelle $f'(x)$ la *dérivée formelle* de $f(x)$. Si $\deg f(x) \geq 1$ et a est une racine de $f(x)$, alors a est une racine simple si et seulement si $f'(a) \neq 0$.

6. Si F est un corps fini, avec $|F| = q$, alors F est le corps de décomposition du polynôme $x^q - x$ sur $\mathbb{F}_p$, où $p = \operatorname{car} F$.